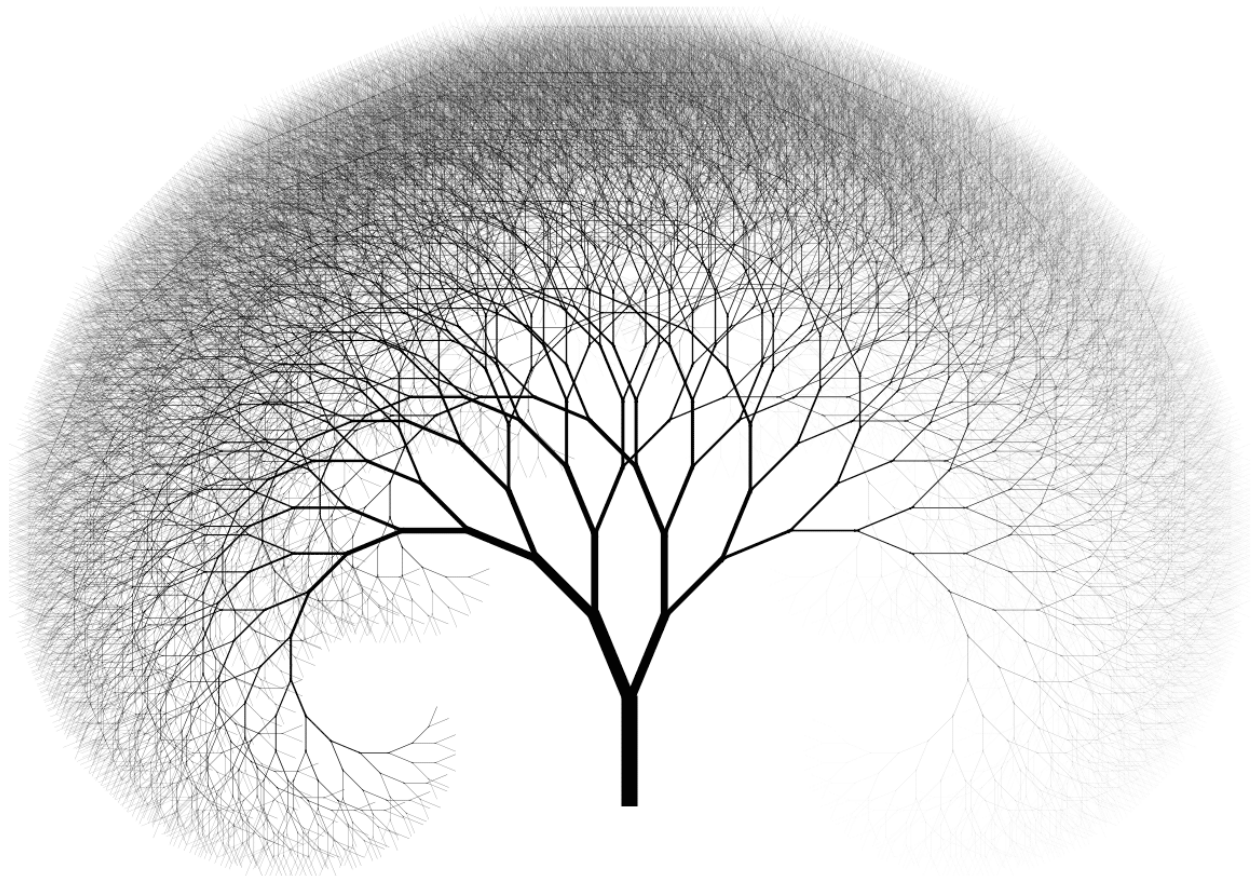


Studieretningsforløb for Matematik A – Programmering B
H. C. Ørsted gymnasiet Ballerup.

Pi, Python & Programmering – og rekursionsligninger



Træningsopgaver:

Opgave 1:

Bestem en rekursionsligning, hvis løsning er alle lige tal

Opgave 2:

Et nybagt forældrepar indsætter 5000kr. på en børneopsparingskonto til 3.0% i rente p.a.. Bestem en rekursionsligning for beløbet der står på kontoen efter hvert år der er gået. Anvend python til at bestemme løsningen til rekursionsligningen for de første 18 år.

Opgave 3:

Fibonacci-talfølgen er en berømt talfølge, der optræder i alle mulige sammenhænge. Den kan defineres ved rekursionsligningen

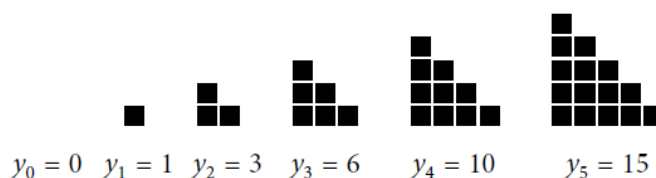
$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

hvor $f_0 = 1$ og $f_1 = 1$.

Skriv et computerprogram, der danner de første 100 tal i fibonacci-talfølgen

Opgave 4:

Bestem en rekursionsligning for antallet af kasser i opstillingen:



Figur 1. Antallet af kasser i en opstilling kan beskrives med en rekursionsligning.

Opgave 5:

Fakultet er et begreb der bruges inden for statistik og kryptografi. Fakultet skrives i matematikken som $n!$

Bestem en rekursionsligning, der viser hvordan fakultet beregnes for tallet n .

Lav et python program der kan beregne et vilkårligt resultat for fakultet.

Opgave 6:

Primtal bruges også i kryptografi, faktisk ville vi ikke kunne benytte digitale pengeoverførsler, hvis det ikke havde været for primtal.

Lav et lille program der kan finde ud af om et tal er et primtal.

Lav et program der kan finde alle primtal mellem 2 og 100.000


Hovedopgave A:







Skriv et computerprogram der bestemmer talværdien af π med så høj præcision som muligt.

1. Indskriv en cirkel med en regulær polygon. (Vælg for nemheds skyld en regulær firkant, et kvadrat). Kald sidelængden i denne polygon for s_0 . Bestem talværdien af denne sidelængde. Find omkredsen af polygonen og divider derefter denne værdi med cirkelns diameter. Dette tal er dit midlertidige estimat for værdien af π .
2. Dan nu en ny regulær polygon indskrevet i cirklen, men med det dobbelte sideantal i forhold til den foregående polygon. Kald sidelængden af den nye polygon for s_1 . Bestem et udtryk der relaterer s_1 til s_0 . (Her kan det hjælpe at lave geogebra-øvelsen nedenfor)
3. Bestem en rekursionsligning for s_{n+1} udtrykt ved s_n og bestem en rekursionsligning for antallet af sider i den indskrevne polygon.
4. Bestem et udtryk så du kan efter n gentagelser ("iterationer") kan bestemme omkredsen af den nyeste polygon, Ω_n samt dens areal A_n
5. Skriv et computerprogram i python, der løser rekursionsligningen for s og bestemmer Ω_n og A_n i et op til en værdi af n , der er så stor at det ikke giver mening at fortsætte højere op. Lad programmet derigennem bestemme en tilnærmelse til π .
6. Anvend matplotlib til at lave en graf eller en figur der illustrerer hvor god metoden er.

Geogebra-øvelse

Installér Geogebra fra www.geogebra.org. Brug derefter geogebra til at konstruere

Tegn en cirkel "ud fra centrum og radius". Vælg centrum til punktet (0,0) i koordinatystemet. Kald dette punkt for O. Vælg radius til "r" og brug skyderen til at sætte værdien af r til 1.	 Cirkel ud fra centrum og radius	
---	---	--

Bestem de fire skæringspunkter mellem koordinatsystemets akser og cirklen, med skæringsværktøjet	 Skæringsværktøj	
Tegn en polygon med disse fire punkter som hjørnepunkter	 Polygon	
Vælg en af polygonens sider. Kald denne side for s_0		
Bestem midtpunktet på s_0 Kald dette punkt for A.	 Midtpunkt eller centrum	
Tegn en halvlinje fra O gennem A	 Halvlinje	
Bestem det punkt hvor halvlinjen skærer cirkelperiferien. Kald dette punkt P.	 Skæringsværktøj	
Kald linjestykket OA for g_0		
Kald linjestykket AP for p_0		
Dan nu to linjestykker der hver forbinder P med et af de to endepunkter for s_0 . Læg mærke til at dette ville du kunne gøre for et hvilket som helst af den oprindelige polygones sider. Gør du det, vil du have dannet en ny polygon. Kald sidelængden i den nye polygon for s_1 .		
Brug værktøjet "Regulær polygon" til at plotte den nye polygon	 Regulær polygon	

Hovedopgave B:

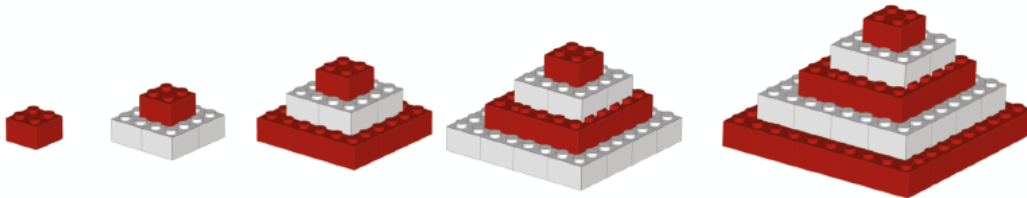


Illustration: John Schou

Billedet viser en række trappepyramider bygget af legoklodser. Den første pyramide består af én klods. Den næste pyramide fremkommer ved, at vi tilføjer et lag med 2×2 klodser under den første. Den næste pyramide i rækken fremkommer så ved, at vi tilføjer 3×3 klodser under den foregående pyramide. Man kan fortsætte rækken og bestemme antallet af klodser i de følgende pyramider.

- Beskriv de to sidste pyramider på billedet samt den næste pyramide i rækken, og bestem hvor mange klodser, der skal bruges til at bygge dem.
- Opskriv en rekursionsligning af formen $y_{n+1} = f(y_n, n)$, der beskriver antallet af klodser, y_{n+1} , i pyramide $n + 1$, ud fra antallet af klodser y_n i pyramide n .
- Sæt $y_0 = 0$ og bestem y_1, y_2, \dots, y_7 ved hjælp af rekursionsligningen.

Skriv derefter et computerprogram i Python, der udregner og plotter de første 50 tal i følgen.

Matematikkompedium

I matematikken bygger vi på viden som I har fra folkeskolen. I har alle stiftet bekendtskab med denne viden, men har måske ikke set den formuleret på præcis samme måde i definitioner og sætninger.

Definition:

Tallet π er forholdet mellem en cirkels omkreds og dens diameter (i det Euklidiske plan).

Definition:

En ligebenet trekant er en trekant i hvilken to af siderne er lige store. De to lige store sider kaldes trekantens *ben*. Den tredje side kaldes trekantens *grundlinje*. Vinklen mellem trekantens ben kaldes trekantens *topvinkel*.

Definition:

En retvinklet trekant er en trekant hvori en vinkel er ret. Den rette vinkels modstående side kaldes *hypotenusen*, og den rette vinkels hosliggende sider kaldes *kateterne*.

Definition:

En median i en trekant er et linjestykke der går fra en vinkelspids til midten af den modstående side.

Definition:

En vinkelhalveringslinje i en trekant er et linjestykke der går fra en vinkelspids, halverer vinklen og går til et punkt på den modstående side.

Definition:

En højde i en trekant er et linjestykke, der går fra en vinkelspids og står vinkelret på den modstående side eller dennes forlængelse, hvorpå højdens endepunkt ligger

Sætning:

I en ligebenet trekant er vinklerne ved grundlinjen lige store

Sætning:

I en ligebenet trekant er topvinklens halveringslinje også højde og median.

Sætning:

Summen af vinklerne i en trekant er 180°

Sætning: (Pythagoras sætning)

I en retvinklet trekant er kvadratet på hypotenusen lig summen af kateternes kvadrater. Kaldes kateterne hhv. a og b samt hypotenusen c , gælder således at $a^2 + b^2 = c^2$.

Sætning:

En trekants areal, T , er givet ved $T = \frac{hg}{2}$, hvor h er højden på grundlinjen g

Bonusopgave (for de hurtigste):

Kochs snefnug en såkaldt "fraktal", som lidt upræcist formuleret er en figur der gentager sig selv ligegyldigt hvor meget du "zoomer ind" på den. Man kan bl.a. bruge fraktaler til komprimering af computergrafik.

Herunder ses de første 5 iterationer i dannelsen af Koch's snefnug. Man tager udgangspunkt i en ligesidet trekant, og tilføjer mindre og mindre ligesidede trekanter

Bestem følgende for Kochs snefnug:

1. Bestem en rekursionsligning for *antallet af sider*.
2. Bestem en rekursionsligning for *antallet af takker*.
3. Bestem en rekursionsligning for *sidelængden*.
4. Bestem en rekursionsligning for *arealet* af snefnugget
5. Implementér disse i et program og bestem hvordan *omkredsen* og *arealet* af snefnugget afhænger af antallet af iterationer.

